0.1 Right Homotopy

left homotopy を考えたのだから双対的に right homotopy も考える事ができる。left homotopy は位相空間の連続写像の homotopic そのままの定義であったが、実は right homotopy も同じことを言っている。以下、C はモデル圏とする。

Definition 0.1.1

$X \in C$ において、X の path object である X^I とは、

$$(1,1) : X \xrightarrow{\sim} X^I \longrightarrow X \times X$$

という分解が存在する object のことである。また、$X^I \longrightarrow X \times X$ が fibration のとき、good path object と呼ぶ。さらに、$X \longrightarrow X^I$ が cofibration(つまり、acyclic cofibration）であるとき、very good path object とよぶ。（やっぱり長い）

以下 lemma 等はすべて left homotopy を参照にすればすべて解ける。

Remmark 0.1.2

X の very good path object が存在する。

Lemma 0.1.3

X : fibrant で、X^I が good path object ならば、

$$p_0, p_1 : X^I \longrightarrow X$$

は acyclic fibration である。

Definition 0.1.4

$f, g : A \longrightarrow X$ が right homotopic であるとは、$(f, g) : A \longrightarrow X \times X$ に対し、その lift

$$H : A \longrightarrow X^I$$

が存在することである。つまり、$p_0 \circ H = f$, $p_1 \circ H = g$ である。このとき、$f \overset{r}{\sim} g$ とかき、H をその right homotopy と呼ぶ。やはり、X^I が good path object のとき、good right homotopy と呼び。very good path object のとき、very good right homotopy と呼ぶ。

Example 0.1.5

位相空間の圏において、$X^I = Map(I, X)$ とおき、

$$(1,1) : X \xrightarrow{j} Map(I, X) \xrightarrow{p} X \times X$$

を、$j(x) = C_x$, $p(f) = (f(0), f(1))$ とおけば、これは X の path object である。

また位相空間の圏において、f, g が homotopic であることと、$f \overset{r}{\sim} g$ であることは同値である。

proof)　　left homotopy のときは当然だったが、right homotopy の場合、$f, g : A \longrightarrow X$ が homotopic なら、その homotopy

$$H : A \times I \longrightarrow X$$

に対し、$ad(H) : A \longrightarrow \mathrm{Map}(I, X)$ が、$(f, g) : A \longrightarrow X \times X$ の lift である。

逆に、$f \overset{r}{\sim} g$ のとき、right homotopy を、

$$H : A \longrightarrow \mathrm{Map}(I, X)$$

とすれば、$ad^{-1}(H) : A \times I \longrightarrow X$ が f と g の homotopy である。

$\square$

Lemma 0.1.6

$f \overset{r}{\sim} g : A \longrightarrow X$ ならば、f と g を繋ぐ good left homotopy が存在する。また、A が cofibrant のとき、f と g を繋ぐ very good left homotopy が存在する。

Lemma 0.1.7

X : fibrant ならば、$\overset{r}{\sim}$ は $\mathrm{Hom}_C(A, X)$ における同値関係である。また、それによる同値類を $\pi^r(A, X)$ とかく。

Lemma 0.1.8

X : fibrant で、$i : A \longrightarrow B$ を acyclic cofibration とする。このとき、

$$i^* : \pi^r(B, X) \longrightarrow \pi^r(A, X)$$

を、$[f] \mapsto [f \circ i]$ で定義すればこれは同型である。

Lemma 0.1.9

A : cofibrant ならば、

$$\pi^r(A,X)\times\pi^r(X,Y)\longrightarrow\pi^r(A,Y)$$

を、$([f],[h])\mapsto[h\circ f]$ で定義すればこれが well defined となる。